Année universitaire 2009–2010

# L1 STS : PHYSIQUE

Examen session 2

*durée 2 heures*

Certains téléphones portables et les manettes de jeu vidéo telles que la Wiimote de Nitendo sont dotés d'accéléromètres. L' accéléromètre de la Wiimote est un capteur MEMS (pour Micro-Electro-Mechanical-System) présentant des microstuctures en silicium. Les éléments du MEMS forment des condensateurs de capacité variable. Le capteur peut être modélisé par un mobile de masse $m$, de centre d'inertie $G$, portant une des armatures des condensateurs, posé sur un support horizontal et pouvant se déplacer le long de l'axe $Ox$. Le mobile est relié au support par des systèmes ressorts/amortisseurs décrivant le comportement mécanique des éléments du MEMS.

On se propose, dans les deux parties indépendantes du sujet, de faire l'étude mécanique et électrique du capteur d'accélération d'une Wiimote.

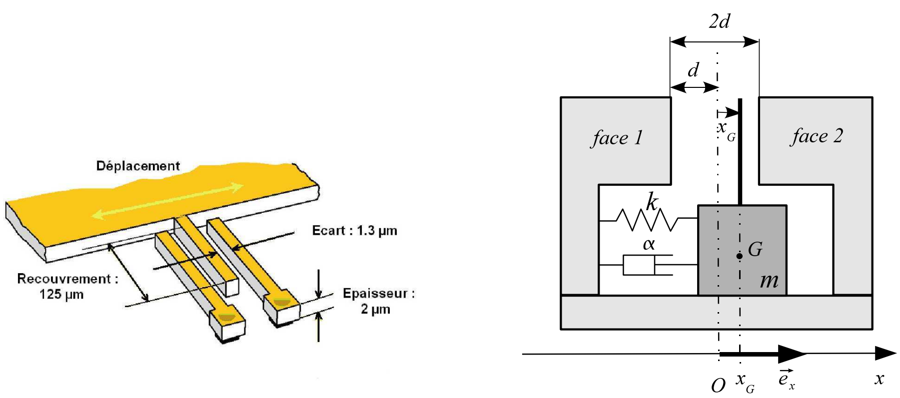


FIGURE 1 – Capteur MEMS d'un accéléromètre

## Exercice I : Etude mécanique

Au repos, la position du mobile est $x_G = 0$, la longueur du ressort est sa longueur à vide $l_0$. Lorsqu'une accélération $\overrightarrow{a_M} = a_M \overrightarrow{e_x}$ s'exerce sur la manette, le mobile se déplace de $x_G$. Il est alors soumis à une force de rappel du ressort de raideur $k$, à une force de frottement visqueux $\overrightarrow{F_f} = -\alpha \overrightarrow{v_G}$. L'étude sera faite dans le référentiel lié à la manette. Dans ce cas, s'ajoute aux autres forces physiques, une force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_i} = -m\overrightarrow{a_M}$.

I.1. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le mobile et les représenter sur un schéma.

I.2. Donner l'expression des composantes des forces sur l'axe $Ox$.

I.3. Ecrire, dans le référentiel lié à la manette, la deuxième loi de Newton[1] pour le mouvement du mobile de masse $m$ et la projeter selon l'axe $Ox$.

I.4. Montrer que la position $x_G$ du centre d'inertie obéit à l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_G}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_G = -a_M$$

1. Quand la manette est accélérée, il est possible d'appliquer dans le référentiel non galiléen lié à la manette la deuxième loi de Newton à la masse $m$ à condition de rajouter, quand on fait le bilan des forces, la force d'inertie $\overrightarrow{F_i} = -m\overrightarrow{a_M}$. L'accélération, la vitesse et la position de la masse $m$ sont alors définies par rapport au référentiel lié à la manette.

Donner les expressions de $\tau$ et $\omega_0$ en précisant leur dimension.

I.5 Le capteur MEMS de la Wiimote possède une pulsation mécanique propre $\omega_0 = 3,5 \times 10^4 \mathrm{rad/s}$. La masse du mobile est $m = 0,7\,\mu\mathrm{g}$ ($1\,\mu\mathrm{g} = 10^{-9}\,\mathrm{kg}$). Dans le cas d'un amortissement critique, donner l'expression de $\tau$ et de $\alpha$ en fonction de $m$ et $\omega_0$. Calculer les valeurs de $\tau$ et de $\alpha$ correspondant aurégime apériodique critique.

I.6 En fait, pour le capteur de la Wiimote, $\alpha = 0,75 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg/s}$. Donner le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. En déduire la nature de l'amortissement ? Donner l'expression de $x_G(t)$ sachant que le mobile est initialement au repos et soumis à l'accélération $a_M$ constante. (On donnera les expressions de la solution homogène et particulière de l'équation différentielle sans chercher à calculer les constantes d'intégration).

I.7 Montrer qu'au bout d'un temps dont on donnera un ordre de grandeur, le déplacement $x_G$ du mobile est proportionnel à l'accélération $a_M$ qui s'exerce sur la manette.

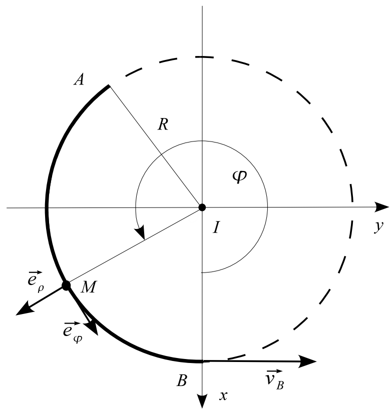


FIGURE 2 – Mouvement effectué par la manette $M$ simulant le mouvement d'un club de golf.

I.8 La manette est utilisée dans un jeu de golf. Le joueur place la manette dans sa main et la soumet à un mouvement circulaire. La manette décrit un arc cercle de rayon $R = IM = 1\,\mathrm{m}$ du point $A$ au point $B$ où la balle est frappée à la vitesse $v_B$ que l'on supposera constante au moment de la frappe.
I.8.a. Donner dans la base de cylindrique $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ liée à la manette, l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a_M}$ à laquelle est soumise la manette.
I.8.b. Donner l'expression de $v_B$ en fonction de l'accélération $a_M$ mesurée par l'accéléromètre au point $B$.
I.8.c. La balle est frappée à la vitesse $v_B = 2,5\,\mathrm{m/s}$. Calculer le déplacement $x_G$ de la partie mobile du capteur MEMS.

**Exercice II : Etude électrique**

Electriquement, la partie mobile du capteur MEMS et les deux faces en vis à vis sont équivalentes à deux condensateurs plans de capacité $C_1$ et $C_2$. Ces deux condensateurs, sont alimentés par un générateur de force électromotrice $E$ et placés chacun en série avec une résistance $R$ (figure 3).

II.1.Quelle est la relation entre l'intensité du courant $i(t)$ traversant un condensateur et la charge $q(t)$ qu'il emmagasine. En déduire la relation entre $i(t)$ et la tension $u_c(t)$ aux bornes d'un condensateur.
II.2 A la mise en marche de la manette, l'interrupteur $K$ est fermé. Aux bornes de chaque dipôle $RC$ s'applique alors la tension continue $E = 3\,\mathrm{V}$. A l'aide de la loi d'additivité des tensions appliquées entre $A$ et $B$, montrer que les tensions aux bornes de chaque condensateur vérifient les équations :

$$\frac{\mathrm{d}u_{c1}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1} u_{c1}(t) = \frac{E}{\tau_1} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u_{c2}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2} u_{c2}(t) = \frac{E}{\tau_2}$$

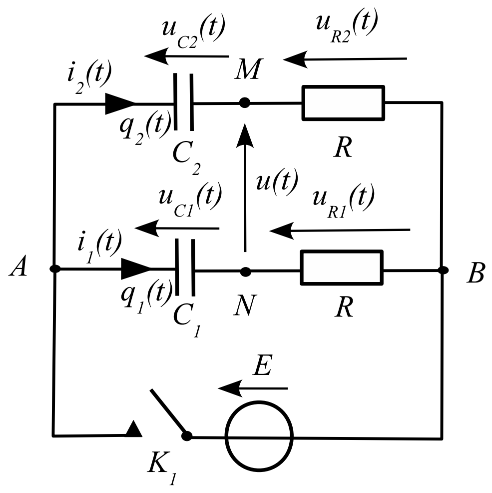


FIGURE 3 – Schéma électrique équivalent du capteur MEMS.

Donner les expressions de $\tau_1$ et $\tau_2$.
Calculer $\tau_1$ et $\tau_2$ pour $C_1 = C_2 = 67\,\mathrm{pF}$ et $R = 150\,\mathrm{k\Omega}$.

II.3 A l'instant initial, les deux condensateurs sont déchargés ($u_{c1}(0) = u_{c2}(0) = 0\,\mathrm{V}$). Déterminer l'expression de $u_{1c}(t)$ et en déduire celle de $u_{2c}(t)$. Représenter l'allure des variations temporelles de ces grandeurs sur un même graphique dans le cas où $C_1 = C_2$.

II.4 Le capteur MEMS est en réalité alimenté par un générateur de tension sinusoïdal. En notation complexe l'expression de la tension délivrée par le générateur est $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$ (avec $j^2 = -1$).

On s'intéresse au régime permanent quand toutes les grandeurs électriques sont sinusoïdales de même pulsation $\omega$. On utilise le formalisme complexe et on pose :

$$\underline{u_{c1}}(t) = \underline{U_{c1}}e^{j\omega t} \quad \underline{u_{c2}}(t) = \underline{U_{c2}}^{j\omega t}$$

Donner l'expression des amplitudes complexes , $\underline{U}_{c1}$ et $\underline{U}_{c2}$ en fonction de $E$, $C_1$, $C_2$, $R$ et $\omega$.

II.5 On place un voltmètre entre $M$ et $N$ qui mesure le module $U$ de l'amplitude de la tension $\underline{u}(t) = \underline{u_{c1}}(t) - \underline{u_{c2}}(t)$. On montre que si la pulsation $\omega$ de la tension d'alimentation est suffisamment élevée :

$$U \simeq ER\omega|C_2 - C_1|$$

La capacité d'un condensateur est fonction de la distance qui sépare les armatures. Au repos cette distance est $d$. Quand le capteur MEMS subit une accélération, l'armature mobile se déplace de la grandeur $x_G$ proportionnelle à l'accélération et on peut écrire :

$$C_1 = C_0 \times \frac{d}{d + x_G} \quad \text{et} \quad C_2 = C_0 \times \frac{d}{d - x_G}$$

Donner l'expression de $U$ en fonction de $x_G$.
II.5 La manette est utilisée dans un jeu de golf. Lors du mouvement, l'accéléromètre est soumis à une accélération $a_M = 6,25\,\mathrm{m/s^2}$ et la partie mobile du capteur MEMS se déplace de $x_G = 5,1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.
Calculer $U$.
On donne : $C_0 = 67\,\mathrm{pF}$, $d = 1,3 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $E = 3\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1,5 \times 10^5 \mathrm{rad/s}$.